

INTERROS
des lycées

Term.
S

Mathématiques

N. MALLET, M. TENTI

Conforme au nouveau programme 2002

Collection dirigée par **Éric MAURETTE**

Avant-propos

Un nouveau programme de mathématiques entre en vigueur en Septembre 2002.

Des changements importants interviennent ; ils concernent presque tous les chapitres abordés en Terminale S. Cet ouvrage a donc été entièrement refondu. Le découpage en six parties facilitera son utilisation aux élèves dont le professeur ne suit pas une progression classique.

Il fallait rester fidèles à nos objectifs, et présenter un ouvrage efficace, répondant aux besoins concrets des élèves. Il a donc aussi été augmenté, et nous avons travaillé à satisfaire à plusieurs exigences :

- Proposer un nombre important d'exercices sur le nouveau programme sans avoir à supprimer des exercices classiques qui continueront à être posés dans les classes.
- Enrichir le contenu du livre par des exercices de premier niveau abordables par tous, et à l'opposé par des exercices d'approfondissement issus d'exercices post-baccalauréat (pour ceux qui veulent prendre un peu d'avance).
- La spécialité n'a pas été négligée. Elle concerne les trois derniers chapitres de l'ouvrage. Elle a été augmentée et précisée. Nous pensons que ces chapitres sont lisibles par tout élève motivé, inscrit ou non en spécialité-maths.

L'auteur insiste sur l'importance du travail d'équipe nécessaire à l'élaboration et la rédaction d'un tel ouvrage. Le travail du lecteur n'en sera que plus efficace.

Marc Tenti

Remerciements

L'auteur et l'équipe de Prépamath tiennent à remercier Patrick Doan pour la qualité de ses illustrations, Michel Bovani pour sa participation à la réalisation de l'ouvrage, ainsi que Bénédicte Bureaux-Bourgeois pour sa relecture attentive



Illustrations :
Patrick DOAN & Michel BOVANI

Coordination éditoriale :
François DÉLIAC

I.S.B.N. 2-09-XXXXXXX - X

© PRÉPAMATH Éditions, 2002
© Éditions NATHAN, 2002 - 9, rue Méchain - 75014 Paris

Sommaire

pages

I. Calcul différentiel et intégral	1
Chapitre 1. Les limites et leurs applications	3
Énoncés	10
Corrigés	15
Chapitre 2. Continuité sur un intervalle, fonction dérivée	29
Énoncés	35
Corrigés	40
Chapitre 3. Introduction à la fonction exponentielle et au logarithme népérien	55
Énoncés	59
Corrigés	62
Chapitre 4. Compléments sur les fonctions logarithmes et exponentielles	71
Énoncés	76
Corrigés	80
Chapitre 5. Intégration	97
Énoncés	103
Corrigés	109
Chapitre 6. Applications du calcul intégral	125
Énoncés	127
Corrigés	134
Chapitre 7. Équations différentielles	153
Énoncés	155
Corrigés	157
II. Suites	163
Chapitre 8. Suites et récurrence	165
Énoncés	168
Corrigés	172
Chapitre 9. Limites de suites	183
Énoncés	186
Corrigés	191
III. Probabilités et simulations statistiques	207
Chapitre 10. Les outils du dénombrement	209
Énoncés	219
Corrigés	224

Sommaire

	<i>pages</i>
Chapitre 11. Probabilités conditionnelles.....	235
Énoncés.....	238
Corrigés.....	242
Chapitre 12. Loix usuelles en probabilités et en statistiques	253
Énoncés.....	258
Corrigés.....	262
IV. Nombres complexes et géométrie plane.....	275
Chapitre 13. Nombres complexes	277
Énoncés.....	284
Corrigés.....	290
Chapitre 14. Nombres complexes et géométrie .	307
Énoncés.....	310
Corrigés.....	314
Chapitre 15. Outils et méthodes en Géométrie plane.....	327
Énoncés.....	332
Corrigés.....	337
V. Géométrie dans l'espace.....	353
Chapitre 16. Produit scalaire	355
Énoncés.....	360
Corrigés.....	363
Chapitre 17. Droites et plans de l'espace.....	371
Énoncés.....	375
Corrigés.....	378
VI. Spécialité	387
Chapitre 18. Arithmétique.....	389
Énoncés.....	394
Corrigés.....	397
Chapitre 19. Les similitudes dans le plan	403
Énoncés.....	408
Corrigés.....	412
Chapitre 20. Sections planes de surfaces	425
Énoncés.....	428
Corrigés.....	430

Chapitre 1

Les limites et leurs applications

1.1 Limites en $+\infty$

Exercice type n° 1

Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \frac{3x + 1}{x^2} \quad g : x \mapsto \frac{7 - 3x^2}{5 + 4x^2}$$
$$h : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 1} - x$$

■ Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy ■

1.1.1 Définitions

Définition 1. Soit ℓ un nombre réel. On dit que f admet ℓ pour limite en $+\infty$, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on a $f(x) \in I$ si x est suffisamment grand.

Définition 2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

si pour tout réel A , on a $f(x) \in [A; +\infty[$ si x est suffisamment grand.

Remarque : L'écriture $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$ signifiera que la limite ℓ est approchée par valeurs supérieures. De même ℓ^- signale une limite approchée par valeurs inférieures.

1.1.2 Opérations

Soit λ un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Les tableaux ci-dessous donnent les limites quand x tend vers λ de $f + g$, fg , $\frac{1}{g}$ connaissant les limites de f et de g . On a écrit « forme ind. » quand l'expression présente une forme indéterminée.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim f + g$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forme ind.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim f \times g$
l	l'	$l \times l'$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	$+\infty$	forme ind.

$\lim g$	$\lim \frac{1}{g}$
$l' \neq 0$	$\frac{1}{l'}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
0	forme ind.
$+\infty$	0
$-\infty$	0

Solution de l'exercice type n° 1

Fonction f :

La limite d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

L'étude est identique en $-\infty$ où la limite est aussi 0.

Fonction g :

On a de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = \frac{-3}{4}.$$

La fonction g étant paire, on en déduit sans nouveau calcul : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{-3}{4}$.

Fonction h :

Le radicande $x^2 + 3x + 1$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, donc est *positif* pour $|x|$ suffisamment grand (d'après la définition d'une limite égale à $+\infty$). On en déduit que la fonction h est bien définie pour $|x|$ suffisamment grand.

Étude en $-\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$, il vient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$$

Étude en $+\infty$

Utilisons l'expression conjuguée :

$$\left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - x\right) \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x\right) = (x^2 + 3x - 1) - (x)^2 = 3x - 1$$

Alors pour $x > 0$ suffisamment grand :

$$h(x) = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1} + x} = \frac{x \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1}$$

Le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2, de sorte que $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{3}{2}$.

1.2 Limite en un réel a

Exercice type n° 2

Étudier le comportement lorsque x tend vers 1, de :

$$x + \frac{1}{(x-1)^2}, \quad \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}, \quad \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

1.2.1 Définitions

Définition 3. Soient des réels ℓ et a . On dit que f admet ℓ pour limite en a , on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ , on a $f(x) \in I$ si x est suffisamment proche de a .

Définition 4. De même, on dit que f admet $+\infty$ pour limite en a , on écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

si pour tout réel A , on a $f(x) \in [A, +\infty[$ si x est suffisamment proche de a .

☞ Les règles de calcul du paragraphe 1 s'appliquent sans changement.

1.2.2 Continuité et dérivabilité en a

Définition 5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est continue en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel $a \in I$.

Définition 6. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si la fonction

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite réelle ℓ en zéro.

On dit alors que ℓ est le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout réel $a \in I$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée fonction dérivée de f .

Limite en a d'une fonction non définie en a

Dans ce cas il est utile de se demander si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a}$$

(pour une certaine fonction ϕ à préciser). Si c'est le cas, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ (un réel)} \iff \phi \text{ est dérivable en } a \text{ et } \phi'(a) = \ell$$

Propriétés

1. Sont continues, dérivables, en tout point $a \in \mathbb{R}$:
toute fonction *polynôme*, les fonctions *sinus* et *cosinus*.
2. Sont continues, dérivables, en tout point a de leur ensemble de définition :
les fonctions *rationnelles*, la fonction *tangente*, et enfin toute fonction construite à l'aide des fonctions précédentes en utilisant les opérations et la composition.
3. Si u une fonction du type précédent, la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$$

est continue sur \mathcal{D}_f , et dérivable en tout réel $x_0 \in \mathcal{D}_f$ vérifiant $u(x_0) \neq 0$.

Même résultat en posant $f : x \mapsto |u(x)|$, qui est dérivable également en tout x_0 vérifiant $u(x_0) \neq 0$.

1.2.3 Limite à droite, limite à gauche**Propriétés**

1. Une fonction f définie en a est continue en a si et seulement si f admet en a une limite à droite et une limite à gauche égales à $f(a)$.
2. Soit λ un réel ou l'un des symboles $\pm\infty$.
Une fonction f non définie en a admet λ pour limite en a si et seulement si f admet en a une limite à droite et une limite à gauche égales à λ .

Remarque : Si f est définie en a , elle peut avoir une limite à droite (resp. à gauche) $\ell \in \mathbb{R}$, telle que $\ell \neq f(a)$. Dans le cas où $\ell = f(a)$, on précise que f est *continue à droite* (resp. *à gauche*) en a .

Solution de l'exercice type n° 2

On a $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty$.

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{(x - 1)^2} \right) = +\infty$$

Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a $x - 1 > 0$ et donc $x - 1 = (\sqrt{x - 1})^2$.

Alors
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

or
$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x - 1} = 0^+$$

d'où :
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$$

Notons que ici, x ne peut tendre vers 1 que par valeurs supérieures; il est pourtant inutile de le préciser dans l'écriture symbolique de la limite, car il est comme toujours sous-entendu que $x \in \mathcal{D}_g$.

Notons k la fonction $x \mapsto \frac{|x - 1|}{x^2 - 1}$. Il vient : $k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ -\frac{1}{x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

En effet :

$$k(x) = \frac{|x - 1|}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{|x - 1|}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1} = \text{signe}(x - 1) \cdot \frac{1}{x + 1}.$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Ainsi, la fonction n'a pas de limite en 1.

1.3 Théorèmes de composition et de comparaison

Exercice type n° 3

Calculer les limites en $+\infty$ de $f : x \mapsto \left| \frac{1 - x}{1 + x} \right|$, $g : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{4|x| - 1}\right)$, et la limite en 1 de la fonction $h : x \mapsto (x - 1)^2 \sin\left(\frac{1}{x - 1}\right)$.

Les théorèmes sur les opérations ne permettent pas toujours de décider de la valeur de la limite, soit en raison d'une forme indéterminée, soit à cause de la présence d'un terme n'ayant pas de limite. Ce paragraphe présente des outils adaptés à cette situation.

Convention : une lettre grecque minuscule désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Théorème 1 (Théorème de composition). *Il prend deux formes*

- Pour deux fonctions :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} g(t) = \beta \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = \gamma \quad \text{entraînent} \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} f(g(t)) = \gamma$$

- Pour une fonction et une suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) = \mu \quad \text{entraînent} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \mu$$

Voici maintenant les théorèmes de comparaison :

Théorème 2 (Positivité de la limite). Soient f et g des fonctions. On suppose que sur un intervalle ouvert contenant λ :

- $f \leq g$ et f tend vers μ tandis que g tend vers ν quand x tend vers λ .
Alors : $\mu \leq \nu$.
- $g \leq f$ et g tend vers $+\infty$ quand x tend vers λ .
Alors f tend vers $+\infty$ quand x tend vers λ .

Théorème 3 (Théorème des gendarmes). Soient f, g, h, F des fonctions. On suppose que sur un intervalle ouvert contenant λ :

- $g \leq f \leq h$ et g, h tendent vers μ quand x tend vers λ .
Alors f tend vers μ quand x tend vers λ .
- $|f - \ell| \leq F$ (pour un certain réel ℓ) et F tend vers 0 quand x tend vers λ .
Alors : f tend vers ℓ quand x tend vers λ .

Solution de l'exercice type n° 3

Fonction f :

On a
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1,$$

on en déduit :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \lim_{X \rightarrow -1} |X| = |-1| = 1.$$

Fonction g :

On a
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{4|x| - 1} = \frac{\pi}{4},$$

alors
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin t = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Notons que, sans autre calcul $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ car g est impaire.

Fonction h :

Pour tout réel $x \neq 1$, on a :

$$\left| \sin \left(\frac{1}{x-1} \right) \right| \leq 1 \quad \text{donc} \quad |h(x)| \leq (x-1)^2.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$ donc aussi, par comparaison : $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$.

1.4 Limites et asymptotes

Ces rappels de 1^{re}S seront sans doute utiles :

- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote (verticale) à \mathcal{C}_f en $x = a$ à droite. En a^- , on aurait une asymptote à gauche.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote (horizontale) à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
- Si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$, alors la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est asymptote (oblique) à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
- Soit f et g deux fonctions. Les courbes (\mathcal{C}_f) et (\mathcal{C}_g) sont dites asymptotes en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

On définit pareillement des asymptotes en $-\infty$.

● **1** _____ Lycée Kléber, Strasbourg

Transformer une expression

15 min.

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{|x|-2}$$

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier les limites de f en -2 puis en 2 .

● **2** _____ Lycée Jacques Prévert, Boulogne

10 min.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1}$.

● **3** _____ Lycée La Bruyère, Versailles

20 min.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}}}{x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$.

● **4** _____ Lycée Marie Curie, Sceaux

10 min.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}}$.

● **5** _____ Lycée Chaptal, Paris

Limites trigonométriques

15 min.

1. Soit α un nombre réel non nul. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$$

2. Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin^2(x)}$$

● **6** _____ **Lycée du Canada, Évreux**
5 min.

On donne

$$f(x) = \sum_{k=1}^{50} \cos(2kx)$$

En utilisant la dérivée de f , montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 50}{x} = 0$$

● **7** _____ **Lycée René Cassin, Arpajon**
Limite d'une somme finie de fonctions 10 min.

Soit n un entier. Calculer en fonction de n :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sin(2x)}{x} + \dots + \frac{\sin((n-1)x)}{x} + \frac{\sin(nx)}{x} \right)$$

● **8** _____ **Lycée des Loges, Évry**
15 min.

- Calculer la limite en 0 de $x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})$
- En affinant le résultat précédent, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

● **9** _____ **Lycée Sainte-Marie, Antony**
Par comparaison 5 min.

f est définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x - \sin x}{3x + 1}$$

- Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{2x - 1}{3x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{3x + 1}$$

- En déduire la limite de f en $+\infty$.

● **10** _____ **Lycée Marie Curie, Sceaux**
15 min.

On définit f sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x}$$

1. Prouver que pour tout réel $x \geq 0$: $4x^2 \leq 4x^2 + x + 1 \leq (2x + 1)^2$.
2. En déduire que pour tout réel $x > 0$: $2 \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

● **11** _____ **Lycée Vieljeux, La Rochelle**
Recherches d'asymptotes 10 min.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{(x - 2)^2}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Déterminer les réels a , b , c et d tels que, pour tout réel $x \neq 2$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2} + \frac{d}{(x - 2)^2}$$

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C).
4. Donner l'équation de la droite (\mathcal{D}), autre asymptote à (C).

● **12** _____ **Lycée Bachelard, Chelles**
10 min.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{x + 2}$$

et la fonction g est définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = x^2 - 3x + 5$$

1. Déterminer le réel a tel que pour tout réel x dans $\mathbb{R} - \{-2\}$, on ait :

$$f(x) = g(x) + \frac{a}{x + 2}$$

2. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$$

3. Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.

● **13** _____ **Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy**
10 min.

Trouver une asymptote oblique à la représentation graphique de la fonction suivante :

$$h : x \mapsto \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{(x + 1)^2}$$

Mise en garde : on ne peut pas utiliser une méthode de coefficients indéterminés, qui supposerait connue la forme du « reste » $\varepsilon(x)$ de la définition du cours.

● **14** _____ **Lycée Ampère, Lyon**

Admettre ou ne pas admettre une limite

35 min.

On définit les fonctions suivantes sur \mathbb{R}^* :

1. $f(x) = \frac{x}{|x|}$
2. $u(x) = \sin \frac{1}{x}$
3. $v(x) = x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

Pour chacune de ces fonctions, calculer, lorsqu'elles existent, leurs limites à droite et à gauche en 0.

● **15** _____ **Lycée François 1^{er}, Fontainebleau**

Pour réviser en fin d'année

10 min.

Soit a un réel quelconque. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x^2 - \sin a^2}{x - a}$$

par deux méthodes (l'une utilisant les formules de trigonométrie).

● **16** _____ **Lycée François 1^{er}, Fontainebleau**

Un exercice classique

25 min.

On rappelle que la partie entière d'un réel x , est notée $E(x)$, et que c'est le plus grand entier n inférieur à x (de sorte que $n \leq x < n + 1$).

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = 1 - x E \left(\frac{1}{x} \right),$$

et en zéro par $f(0) = 0$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$|f(x)| < |x|$$

2. Etudier la continuité de f en zéro.
3. Etudier la continuité de f en $x_0 \neq 0$.

● **17** _____ **Nouveau programme**

Revenir à la définition d'une limite

15 min.

Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$).

On suppose f croissante sur $]a, b[$, démontrer que f est croissante sur $[a, b]$.

● **18** _____ **Nouveau programme**

20 min.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , et soient deux réels ℓ et L . On suppose :

- (i) Pour tout $A > 0$, f est bornée sur $[-A, A]$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = L$.

Démontrer que f est bornée sur \mathbb{R} tout entier.

● 1 Lycée Kléber, Strasbourg

1. Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$|x| = x$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1$$

De même, pour tout $x \leq 0$, on a :

$$|x| = -x$$

donc, pour $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$:

$$f(x) = \frac{x+2}{-x-2} = -1$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

2. Nous avons vu que pour $x \in]-\infty, -2[\cup]-2, 0[$:

$$f(x) = \frac{x+2}{-x-2} = -1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$$

Par contre :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

● 2 Lycée Jacques Prévert, Boulogne

1. On a :

$$2x^2 - 2x + 3 = 2x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} \right)$$

soit, pour x positif assez grand,

$$1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} \geq 0$$

donc on peut écrire :

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 3} = x\sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} \right) = 1$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2}} = \sqrt{2}$$

2. Pour tout réel x tel que $x \neq -1$ et $x \neq 0$:

$$\frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{x^4}{x} \frac{\left(1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Or :

$$\frac{x^4}{x} = x^3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

● 3 Lycée La Bruyère, Versailles

1. Pour tout réel x ,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

donc :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}}{x} = \frac{|x| \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}}{x}, \quad x \neq 0$$

Or

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = \sqrt{1} = 1$$

donc par composition des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} = 1 \quad \text{puis} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 1$$

Par ailleurs, pour tout $x < 0$, on a :

$$\frac{|x|}{x} = -1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1}}}{x} = -1.$$

2. Quel que soit x , tel que $x \neq -1$ et $x \neq 0$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

donc :

$$x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = 1$$

● 4 Lycée Marie Curie, Sceaux

On essaie dans cet exercice la méthode dite des *quantités conjuguées*.

1. Quel que soit x , tel que $x + 1 > 0$ et $x - 1 > 0$, c'est-à-dire pour tout $x > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}$$

Soit :

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1}) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = +\infty$$

2. On procède de même. Pour tout $x > 1$, les racines carrées ci-dessous sont toutes bien définies, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} &= \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x})} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{(x^2+x) - (x^2-x)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{2x} \\ &= \frac{|x| \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right)}{2x}. \end{aligned}$$

Or, quand $x > 0$:

$$\frac{|x|}{x} = 1$$

donc, pour $x > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}{2}.$$

enfin :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} \right) = 1$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}} \right) = 1$$

● 5 Lycée Chaptal, Paris

1. Pour tout réel x non nul :

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{x}{\sin(x)}.$$

Or : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ dont on déduit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1$. Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)} = \alpha \cdot 1 \cdot 1 = \alpha.$$

2. Le numérateur et le dénominateur sont de limite nulle, donc $\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$ présente une forme indéterminée en 0. Cependant, en utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{\cos x - 1}{1 - \cos^2 x} = \frac{-(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

En simplifiant le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{-1}{1 + \cos x}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

● 6 Lycée du Canada, Évreux

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{50} -2k \sin(2kx)$$

En particulier,

$$f'(0) = \sum_{k=1}^{50} -2k \sin 0 = 0$$

Mais on a aussi

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

avec

$$f(0) = \sum_{k=1}^{50} \cos 0 = \sum_{k=1}^{50} 1 = 50$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 50}{x} = 0$$

● 7 Lycée René Cassin, Arpajon

Rappelons que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Alors, pour tout $\alpha \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \lim_{y \rightarrow 0} \alpha \cdot \frac{\sin(y)}{y} = \alpha.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\sin(2x)}{x} + \dots + \frac{\sin((n-1)x)}{x} + \frac{\sin(nx)}{x} \right) \\ = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

● 8 Lycée des Loges, Évry

1. Notons une fois pour toutes $f(x)$ la fonction étudiée dans cette question. Par continuité des fonctions sinus et cosinus en $\frac{\pi}{4}$, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et de même} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

2. Rappelons les formules de trigonométrie :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) \\ &= \sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = 0^+$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2} \sin x} = +\infty \end{aligned}$$

● 9 Lycée Sainte-Marie-Lacroix, Antony

1. Pour tout réel $x \geq 0$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

d'où :

$$2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$$

Comme de plus :

$$\text{pour } x \geq 0, \quad 3x + 1 > 0$$

on peut diviser par $3x + 1$ sans changer le sens :

$$\frac{2x - 1}{3x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{3x + 1}$$

2. On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{3x} \right) = \frac{2}{3}$$

et de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{3x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{3x} \right) = \frac{2}{3}$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$

● 10 ————— Lycée Marie Curie, Sceaux

1. Quel que soit le réel positif x , on a $0 \leq x + 1$, donc :

$$4x^2 \leq 4x^2 + x + 1.$$

Par ailleurs :

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 = (4x^2 + x + 1) + 3x$$

et quel que soit $x \geq 0$, on a $3x \geq 0$, donc :

$$4x^2 + x + 1 \leq (4x^2 + x + 1) + 3x.$$

Ainsi :

$$4x^2 \leq 4x^2 + x + 1 \leq (2x + 1)^2 \quad (\star)$$

2. Quand $x > 0$, tous les termes de (\star) sont positifs. Comme la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$, il vient :

$$2|x| \leq \sqrt{4x^2 + x + 1} \leq |2x + 1|$$

Mais, pour $x \geq 0$:

$$|x| = x \quad \text{et} \quad |2x + 1| = 2x + 1$$

on obtient donc :

$$2x \leq \sqrt{4x^2 + x + 1} \leq 2x + 1 \quad (\star\star)$$

Or $\frac{1}{x} > 0$, donc en multipliant $(\star\star)$ par $\frac{1}{x}$:

$$2 \leq \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x} \leq \frac{2x + 1}{x}.$$

3. Utilisons la question 2, ce qui donne immédiatement la réponse :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = 2$$

$f(x)$ est donc encadrée par deux quantités qui tendent vers 2. On en déduit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ existe et vaut 2.

● 11 Lycée Vieljeux, La Rochelle

1. Pour tout réel x , $x \neq 2$:

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} &= \frac{(ax+b)(x-2)^2 + c(x-2) + d}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(ax+b)(x^2 - 4x + 4) + cx - 2c + d}{(x-2)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + (4a-4b+c)x + 4b-2c+d}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} + \frac{d}{(x-2)^2} &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -3 \\ 4a - 4b + c = 3 \\ 4b - 2c + d = -3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \\ d = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \neq 2$:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

2. ● On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) = 0$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Par analogie, on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

● On a :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 3x - 3) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)^2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 = 0^+$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

3. Pour tout réel $x \neq 2$:

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} \right) = 0$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (\mathcal{C}) aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.

4. Les limites en 2^+ et 2^- sont infinies, donc la droite (\mathcal{D}) d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à droite et à gauche.

● 12 _____ Lycée Bachelard, Chelles

1. Pour tout $x \neq -2$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \frac{(x-1)^2(x+1) - (x^2 - 3x + 5)(x+2)}{x+2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x+1) - (x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x + 5x + 10)}{x+2} \\ &= \frac{x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + x + 1 - (x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x + 5x + 10)}{x+2} \\ &= \frac{-9}{x+2} \end{aligned}$$

On a trouvé : $a = -9$

2. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-9}{x+2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-9}{x+2} \right) = 0 \end{aligned}$$

3. Les courbes représentatives des fonctions f et g sont asymptotes aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$.

● 13 _____ Lycée Albert Schweitzer, Le Raincy

Nous utilisons une méthode dite de *simplification partielle*, au sens où on fait apparaître au numérateur des termes qui se simplifient avec le dénominateur (tandis que d'autres termes ne se simplifient pas). Il s'agit donc essentiellement d'une transformation d'écriture.

On remarque que $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et on fait donc apparaître, autant que possible, $x^2 + 2x + 1$ au numérateur :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{[2x(x+1)^2 - 4x^2 - 2x] + 3x^2 + 2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x(x+1)^2 - x^2 - 2x + 2}{(x+1)^2} \\ &= 2x + \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x+1)^2} \quad \text{simplification partielle} \\ &= 2x + \frac{-(x+1)^2 + 3}{(x+1)^2} \\ &= 2x - 1 + \frac{3}{(x+1)^2} \quad \text{simplification partielle} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$ et $-\infty$.

De plus en remarquant : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{(x+1)^2} = 0^+$, on constate que \mathcal{C}_f est *au-dessus* de son asymptote, en $-\infty$ comme en $+\infty$.

● 14 Lycée Ampère, Lyon

- Pour tout réel $x > 0$, on a $|x| = x$, et donc $f(x) = 1$. On en déduit : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.
 - Par contre, si $x < 0$ on a $|x| = -x$, d'où $f(x) = -1$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$.
- Démontrons que la fonction u n'a de limite ni en 0^+ , ni en 0^- .

La fonction sinus prend :

(i) la valeur 1 en $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$,

(ii) la valeur 0 en $y_n = 2n\pi$, et ce pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Il s'en suit :

(i') $u\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$ et

(ii') $u\left(\frac{1}{y_n}\right) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Raisonnons alors par l'absurde : supposons qu'une limite ℓ existe en $+\infty$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ donc par le théorème de composition avec une suite ayant

une limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u\left(\frac{1}{x_n}\right) = \ell$.

Or, par (i') : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1$, de sorte que la seule possibilité est $\ell = 1$. Mais si on utilise de la même façon la suite $\frac{1}{y_n}$, en raison de (ii') on aboutit à $\ell = 0$ (absurde).

3. Pour tout réel x , $x \neq 0$:

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

• On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Alors, par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = 0$.

• De même, si $x < 0$:

$$x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq -x.$$

On a donc aussi $\lim_{x \rightarrow 0^-} v(x) = 0$.

Remarque : Les limites à droite et à gauche étant réelles et égales, la fonction v a une limite en zéro.

● 15 ————— Lycée François 1^{er}, Fontainebleau

Notons une fois pour toute $Q(x)$ le quotient étudié.

Méthode 1. — On reconnaît, dans l'expression de l'énoncé, le *taux de variation en a* de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \sin x^2.$$

La fonction f étant dérivable sur \mathbb{R} elle l'est en a , d'où

$$\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = f'(a) = 2a \cos a^2.$$

Méthode 2. — Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$,

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{x-a} \cdot \left[2 \cdot \cos \frac{x^2+a^2}{2} \cdot \sin \frac{x^2-a^2}{2} \right] \\ &= (x+a) \cdot \cos \frac{x^2+a^2}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2-a^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{2} = 0,$$

donc par composition :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{x^2 - a^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2 - a^2}{2}\right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 2a \cdot \cos a^2 \cdot 1 = 2a \cos a^2.$$

● 16 Lycée François 1^{er}, Fontainebleau

1. Pour tout réel u , on a

$$E(u) \leq u < E(u) + 1,$$

donc

$$0 \leq u - E(u) < 1.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, en prenant $u = \frac{1}{x}$:

$$0 \leq \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1.$$

En multipliant par le réel positif $|x|$, il vient :

$$0 \leq |x| \cdot \left[\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \right] < |x|.$$

Or,

$$|x| \cdot \left[\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \left| x \cdot \left[\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) \right] \right| = \left| 1 - x \cdot E\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |f(x)|.$$

Bilan :

$$|f(x)| < |x|.$$

2. On en déduit, par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en zéro.

3. ● Si $x > 1$ alors :

$$0 < \frac{1}{x} < 1, \quad \text{donc} \quad E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

donc $f(x) = 1$.

Ainsi, la fonction f est constante, donc continue, sur $]1, +\infty[$.

● On en déduit aussi $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, tandis que

$$f(1) = 1 - 1 = 0 \neq 1,$$

donc f n'est pas continue en 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si } x \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] \text{ alors } E\left(\frac{1}{x}\right) = n$$

donc :

$$f(x) = 1 - nx.$$

La fonction f est donc affine, en particulier continue, sur $\left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$.

- Il s'en suit également que f est continue en $x_0 = \frac{1}{n}$, avec $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

Or, si pour un $n \geq 2$ on a $t \in \left] \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1} \right]$, son image se calcule par

$$f(t) = 1 - (n-1)t$$

de sorte que

$$\lim_{\left(\frac{1}{n}\right)^+} f = \frac{1}{n} \neq f\left(\frac{1}{n}\right).$$

La fonction f n'est pas continue en $x_0 = \frac{1}{n}$.

- Enfin la fonction est paire, donc l'étude achevée sur \mathbb{R}^+ suffit à assurer des résultats symétriques sur \mathbb{R}^- , et on peut énoncer :

$$f \text{ est continue en } x_0 \text{ ssi } x_0 \notin E, \text{ où } E = \left\{ \frac{1}{m}, m \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

● 17 Nouveau programme

Dire que f est croissante sur $[a, b]$ signifie que, pour tout x_1 et tout x_2 de $[a, b]$:

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ici nous savons déjà que f est croissante sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Il reste donc à démontrer que $f(a) \leq f(x_2)$ pour tout $x_2 \in [a, b]$ et $f(x_1) \leq f(b)$ pour tout $x_1 \in [a, b]$, autrement dit :

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

pour tout $x \in [a, b]$.

Commençons par justifier l'inégalité $f(a) \leq f(x_2)$ pour tout $x_2 \in]a, b[$.

Soit $x_2 \in]a, b[$. Alors, pour tout $x \in]a, x_2[$ on a

$$f(x) \leq f(x_2)$$

car f est croissante sur $]a, b[$.

En passant à la limite quand x tend vers a , il vient

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(x_2).$$

La fonction f étant continue en a , cette limite vaut $f(a)$ donc :

$$f(a) \leq f(x_2).$$

Ainsi : $f(a) \leq f(x_2)$ pour tout $x_0 \in]a, b[$.

On démontrerait de même : $f(x_1) \leq f(b)$ pour tout $x_1 \in]a, b[$.

Conclusion : tout x appartenant à $]a, b[$, vérifie

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

D'autre part, l'encadrement est vrai en a et en b . Il est donc vrai pour tout $x \in [a, b]$.

● 18 Nouveau programme

On utilise la définition de la limite :

$]l - 1, l + 1[$ est un intervalle ouvert contenant l , donc

$$f(x) \in]l - 1, l + 1[$$

pour tout x suffisamment grand.

Notons donc x_1 un réel choisi suffisamment grand pour que :

$$x \geq x_1 \implies f(x) \in]l - 1, l + 1[.$$

De même, $]L - 1, L + 1[$ contient L d'où un réel x_2 tel que

$$x \leq x_2 \implies f(x) \in]L - 1, L + 1[.$$

Soit alors $A = \max(|x_1|, |x_2|)$.

La fonction f est, par hypothèse, bornée sur $[-A, A]$, d'où l'existence d'un réel M tel que :

$$x \in [-A, A] \implies |f(x)| \leq M.$$

Par ailleurs, si $x \in]-\infty, -A]$ alors $x < x_2$ d'où

$$L - 1 \leq f(x) \leq L + 1.$$

Si $x \in [A, +\infty[$ on a $x > x_1$ de sorte que

$$l - 1 \leq f(x) \leq l + 1.$$

Rassemblons : en posant

$$\mu = \max(M, |L - 1|, |L + 1|, |l - 1|, |l + 1|),$$

il vient :

$$\text{Quel que soit } x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \mu.$$