

**INTERROS**

*de Prépas & Deug*

**MP-PC-PSI**

**SPÉ**

**Algèbre**

*Benoît Chevalier*

Professeur agrégé de Mathématiques  
Ancien élève de l'École Normale Supérieure  
Ingénieur du Corps des Ponts et Chaussées

Collection dirigée par :

*Éric MAURETTE*

*Nassim MOKRANE*

*Nouvelle parution, aux Éditions PRÉPAMATH,  
dans la collection « Interros de Prépas et Deug » :  
Chimie – Sup MPSI-PCSI; Deug 1<sup>re</sup> année  
par Cyriaque CHOLET*



*Je tiens à remercier les personnes suivantes pour l'aide inestimable  
qu'elles m'ont apportée dans la réalisation de cet ouvrage :  
Marc ESPIE, Éric MAURETTE, Fabrice NOILHAN, Nicolas TOSEL,  
Frédéric VÉRON.*

*Je souhaite également exprimer ma sincère reconnaissance à  
Ahmed YAHIAÏÈNE, Professeur agrégé de mathématiques au Lycée  
La Merci à Montpellier, pour sa relecture soignée.*



*Coordination éditoriale :*  
Nassim MOKRANE

# *Avant-propos*

La seconde année d'études supérieures en sciences est une année de choix ; choix d'autant plus délicats qu'ils dépendent fortement des résultats obtenus aux examens ou aux concours, pour les élèves de Mathématiques Spéciales comme pour les élèves de DEUG qui choisissent de s'y présenter.

Dans cette perspective, il est nécessaire, pour avoir les meilleures chances de succès, d'organiser son travail avec des objectifs précis. La plupart des épreuves consiste en des devoirs écrits et des exercices oraux, les uns et les autres basés en mathématiques sur un programme relativement considérable, puisqu'il réunit l'ensemble des cours de deux années.

Il faut naturellement le connaître de manière très sûre, d'autant plus que des questions de cours, pour lesquelles il est demandé de pouvoir donner énoncé et démonstration de façon à la fois précise et concise, sont posées très fréquemment. Pour ceux qui connaissent leur sujet, ce sont des points facilement gagnés, tandis que des hésitations font perdre un temps précieux à l'écrit, et sont du plus mauvais effet à l'oral.

Néanmoins il ne suffit pas, pour réussir, de se limiter à des exercices d'application du cours peu ambitieux qui permettent essentiellement de vérifier qu'on l'a bien compris. Les exercices de « colle » sont de ce type, et s'ils ont leur utilité, ils correspondent trop peu à la réalité du concours pour constituer un entraînement efficace. Il est vraiment nécessaire de travailler sur les questions des annales, d'autant plus que de nombreux exercices ont tendance à devenir des « classiques », et que les mêmes méthodes peuvent souvent être réutilisées à l'oral et à l'écrit. S'il n'est pas exclu de se voir poser une question que l'on a déjà vue, il est beaucoup plus probable de pouvoir utiliser les raisonnements connus pour résoudre les problèmes qui peuvent être proposés, que ceux-ci soient originaux ou non.

Le but de ce livre est de permettre aux étudiants de disposer d'un support unique pour les aider dans la réalisation de ces objectifs en algèbre. Il recense tous les énoncés qui peuvent dans cette discipline faire l'objet de questions de cours, afin de permettre aux élèves de contrôler qu'ils en connaissent les démonstrations, mais aussi de mettre tous ces résultats à leur disposition sous une forme compacte. Dans chaque partie, plusieurs exercices d'application ont pour vocation d'exposer quelques résultats classiques mais à la limite du programme. Ceux-ci font souvent l'objet de questions (parfois une partie entière) à l'écrit, et peuvent aider à comprendre les exercices

# Avant-propos

oraux ; de tels résultats ne doivent toutefois pas être utilisés sans démonstration. Enfin, il propose un nombre important de problèmes posés à l'écrit et à l'oral des grands concours d'écoles d'ingénieurs.

Tous les exercices et les problèmes proposés sont suivis d'une correction complète et originale, qui ne se contente pas de donner quelques idées sur lesquelles travailler, mais où tous les calculs sont expliqués en intégralité. On a cherché en particulier dans chaque cas à expliquer pourquoi tel énoncé doit faire penser à utiliser tel raisonnement. De nombreux énoncés mathématiques se démontrent en utilisant des « astuces » qui souvent ne sont géniales que pour ceux qui n'en ont pas examiné le détail. Même pour les exercices difficiles de ce livre, on peut trouver une résolution efficace et méthodique en considérant les exemples les plus simples, en établissant précisément la liste des résultats que l'on souhaite obtenir, que l'on peut conjecturer d'après les exemples, ou que l'énoncé semble suggérer, pour enfin les démontrer étape par étape.

Il est conseillé de traiter les problèmes en temps limité, autant que possible dans les conditions réelles du concours, en évitant au début de se référer au corrigé. Après avoir passé le temps nécessaire à lire le sujet dans son intégralité, on peut commencer à s'y plonger en tentant de garder en mémoire l'esprit d'ensemble, en utilisant les notations de l'énoncé et en gardant à l'esprit sa logique interne.

On a souvent, dans des questions enchaînées, des éléments de réponse en se demandant quel rôle telle question joue dans l'ensemble du problème et quelle sont les propriétés qui devront en découler par la suite. À l'écrit cependant, il est souvent inutile de passer plus d'un quart d'heure sur une question si on ne voit pas comment faire. À l'oral, la situation est différente, mais devant une grosse difficulté on peut tenter de chercher de l'aide auprès du correcteur (il est cependant probable qu'il refuse d'apporter son aide s'il ne l'a pas offerte spontanément).

Si, pour un exercice ou un problème de ce livre, on a épuisé le temps que l'on s'était donné, avant de se référer au corrigé, il est conseillé de poser la question à des camarades ou à un professeur qui pourra donner une indication sans tout dévoiler. Dans le cas d'un professeur, il peut aussi être là pour corriger les questions qui ont été traitées, les idées et également la rédaction qu'a pu faire l'étudiant.

# *Avant-propos*

Il existe une rédaction spécifique aux classes préparatoires scientifiques et aux premiers cycles universitaires. Il faut garder à l'esprit que résoudre un problème pour soi n'est pas suffisant, il s'agit avant tout de convaincre le correcteur que l'on a bien compris pourquoi un énoncé est vrai. Celui-ci attend en général certains mots-clés qui montrent que le raisonnement est juste, et qu'il s'enchaîne logiquement. Les tentatives avortées ne sont en effet pas les bienvenues (on pourra avantageusement les rayer sur sa feuille). Pour convaincre, il est important d'être soi-même convaincu, mais aussi de réfléchir à ce que l'on écrit : trop de petites erreurs peuvent avoir des conséquences désastreuses à la fois sur le jugement du correcteur et sur le bon enchaînement du raisonnement.

Enfin, il ne faut pas oublier qu'en classe préparatoire, si les succès obtenus en cours d'année permettent de s'évaluer et de choisir les concours à présenter, le seul résultat qui compte est le résultat au concours, qui a souvent surpris en bien ou en mal plus d'un étudiant. C'est pourquoi on a cherché à faire un ouvrage qui vise spécifiquement la préparation, tout au long d'une ou de plusieurs années, de cette échéance.

# Sommaire

pages

<b>Chapitre 1. Algèbre générale</b> .....	<b>1</b>
<b>Cours</b> .....	<b>1</b>
1.1. Groupes .....	<b>1</b>
1.1.1. Généralités .....	<b>1</b>
1.1.2. Sous-groupe de $\mathbb{R}$ et groupes finis associés .....	<b>4</b>
1.1.3. Action d'un groupe sur un ensemble .....	<b>5</b>
1.1.4. Groupe symétrique .....	<b>6</b>
1.2. Anneaux et corps .....	<b>8</b>
1.2.1. Généralités .....	<b>8</b>
1.2.2. Idéaux d'un anneau .....	<b>10</b>
1.2.3. Arithmétique dans $\mathbb{R}$ .....	<b>11</b>
1.2.4. Arithmétique des polynômes .....	<b>13</b>
<b>Énoncés</b> .....	<b>16</b>
<b>Corrigés</b> .....	<b>31</b>
<b>Chapitre 2. Algèbre linéaire</b> .....	<b>89</b>
<b>Cours</b> .....	<b>89</b>
2.1. Espaces vectoriels et applications linéaires .....	<b>89</b>
2.1.1. Généralités .....	<b>89</b>
2.1.2. Algèbre linéaire en dimension finie .....	<b>92</b>
2.1.3. Rang, trace et déterminant .....	<b>95</b>
2.2. Formes linéaires, formes bilinéaires, formes quadratiques .....	<b>99</b>
2.2.1. Dualité en dimension finie .....	<b>99</b>
2.2.2. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques .....	<b>101</b>
<b>Énoncés</b> .....	<b>104</b>
<b>Corrigés</b> .....	<b>118</b>
<b>Chapitre 3. Réduction des endomorphismes</b> .....	<b>171</b>
<b>Cours</b> .....	<b>171</b>
3.1. Stabilité .....	<b>171</b>
3.1.1. Sous-espaces stables .....	<b>171</b>
3.1.2. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice .....	<b>173</b>
3.2. Réduction en dimension finie .....	<b>175</b>
3.2.1. Polynômes d'endomorphismes .....	<b>175</b>
3.2.2. Diagonalisabilité .....	<b>177</b>
3.2.3. Nilpotence .....	<b>178</b>
3.2.4. Trigonalisabilité .....	<b>178</b>
<b>Énoncés</b> .....	<b>180</b>
<b>Corrigés</b> .....	<b>196</b>

# Sommaire

pages

<b>Chapitre 4. Espaces euclidiens et hermitiens . . . .</b>	<b>271</b>
<b>Cours . . . . .</b>	<b>271</b>
4.1. Espaces préhilbertiens . . . . .	271
4.1.1. <i>Produits scalaires et normes</i> . . . . .	271
4.1.2. <i>Orthogonalité</i> . . . . .	273
4.2. Espaces euclidiens et hermitiens . . . . .	274
4.2.1. <i>Généralités sur les espaces préhilbertiens de dimension finie</i> .	275
4.2.2. <i>Applications linéaires dans les espaces hermitiens</i> . . . . .	276
4.2.3. <i>Espaces euclidiens et applications linéaires</i> . . . . .	278
<b>Énoncés . . . . .</b>	<b>281</b>
<b>Corrigés . . . . .</b>	<b>298</b>

# Quelques méthodes de travail

■ Tous les conseils qui suivent sont ceux utilisés par un grand nombre de majors (sortis premiers) de Polytechnique ou de l'ÉNA, par des professionnels de l'organisation et sont également recommandés par de nombreux professeurs. Pour en savoir plus sur le sujet, nous vous conseillons le livre *Comment travailler plus efficacement*, de E. Matrullo et E. Maurette, aux éditions Prépamath.

## Faire des «feed-back»

■ Le «feed-back» est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement, *sans s'aider de notes*, ce que l'on vient d'apprendre (exercices et cours). Ce contrôle peut se faire *mentalement, oralement ou par écrit*.

■ Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement, et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus le matin en classe (*feed-back mental*).

■ Après avoir relu votre cours le soir, essayez de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon (*feed-back écrit*).

■ Après avoir résolu un problème, prenez 5 minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappelez clairement l'énoncé ainsi que la démarche de résolution (*feed-back écrit*).

■ Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent *feed-back oral*.

■ Choisissez le type de «feed-back» qui vous convient le mieux et faites-en le plus régulièrement possible (après chaque cours et chaque série d'exercices). Pour être efficace, un «feed-back» doit se faire sans l'aide de vos notes. Ainsi, faire des fiches de résumés de cours à partir de vos cahiers ouverts ne constitue nullement un «feed-back».

## Miser sur la qualité

■ De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limité d'exercices, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité de piètre qualité. Une tendance très répandue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficace car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématiques ou de physique, c'est de l'avoir parfaitement compris et assimilé. Ainsi :

■ À la fin d'un problème, prenez 5 à 10 minutes pour essayer de trouver un moyen de le généraliser ou de le compliquer (c'est ce que font souvent les professeurs pour concevoir leurs contrôles écrits) ; trouvez ce que cela pourrait changer dans la solution.

■ Prenez également l'habitude, après chaque exercice, de faire un «feed-back» en faisant *ressortir la démarche générale et en tissant des liens avec le cours*. Bref, il ne

faut pas vous contenter de résoudre l'exercice, mais il vous faut lui apporter de la *valeur ajoutée* et vous interroger sur son contenu.

■ *Idem* pour le cours. Ne vous contentez pas de le parcourir de manière passive. Il vous faut avoir la rigueur d'*effacer toutes les zones d'ombre*. Pour chaque théorème, il faut vous demander quels types d'exercices son utilisation permettra de résoudre.

## Méthode des «couches successives»

■ Cette méthode est très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions.

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace que de l'attaquer de front, de manière linéaire. La bonne manière consiste à d'abord *survoler l'ensemble*, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grands titres, ainsi que les noms des paragraphes (*première couche*, étape devant durer 5 minutes). Dans l'étape suivante (*deuxième couche*, d'une durée de 10 minutes), on reprend son cours du début en retenant cette fois également les *théorèmes et résultats importants*. Après cette deuxième couche, on a déjà une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (*troisième couche*) : on reprend son cours au début pour, cette fois-ci, l'*étudier en profondeur* en apprenant le détail des démonstrations.

Il est à noter que cette méthode peut être également appliquée avec succès à des matières littéraires. Par exemple :

■ Pour la *préparation d'un contrôle*, on commencera par passer en revue rapidement l'ensemble du cours et des exercices du chapitre précédemment étudiés, avant de les réviser en détail. Ainsi aura-t-on développé une compréhension synthétique et claire.

■ De même, avant d'aborder un *problème volumineux* (tel qu'un contrôle écrit), il est préférable de survoler l'ensemble du problème avant de l'attaquer.

## Rapidité

■ Pour acquérir de la rapidité, 3 voies sont possibles :

■ Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous *concentrer sur une seule chose à la fois*, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème ou une dissertation, en rêvasant à ce que vous pourriez trouver à manger dans le réfrigérateur ou en écoutant de la musique.

■ Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les *mêmes conditions qu'en contrôles*. Le minutage de chacun des exercices de ce livre est fait en ce sens. Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne deviendrez jamais rapide.

■ Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une *plage horaire serrée*. Engagez-vous, par exemple, à travailler chez vous tous les jours entre 18 h et 20 h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelle que soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne se donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvaser. L'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

# PREPAMATH

Centre pédagogique privé animé par des élèves-ingénieurs de  
Polytechnique et Centrale

PREPAMATH organise des **stages intensifs** et  
propose des **cours particuliers** toutes matières aux élèves de

## 6<sup>ème</sup> à Terminale, Prépas & Deug



### Stages intensifs

- Février
- Noël
- Pâques
- Pré-rentree
- Maths, Physique-Chimie, SVT
- Français, Philo, Eco
- Histoire-Géo, Méthodologie
- Anglais, langues...

### Cours particuliers

Pour recevoir gratuitement  
notre documentation  
ou nous faire part de vos  
remarques à propos de cet  
ouvrage, écrire à :

ou envoyer un mail à :

**Prepamath**

**124, rue Vieille  
du Temple  
75003 Paris**

**edition@prepamath.com**

**01.42.71.90.00**

**www.prepamath.com**

Paris 6<sup>e</sup>, 12<sup>e</sup>, 16<sup>e</sup> • Sceaux • Bordeaux • Grenoble  
Lorient • Lyon • Marseille • Nancy • Nantes • Strasbourg • Toulouse